Qualitätsmanagement

Übung 11

24. Juni 2008

χ^2-Anpassungstest

- man prüft ob die Stichprobenverteilung mit der unbekannten Annahme im Widerspruch steht oder nicht
- Frage lautet: können Unterschiede zwischen der Stichprobenverteilung und der für die Grundgesamtheit vermuteten Verteilung bestehen
- Idee: wir haben eine erwartete Anzahl von Häufigkeiten, die unter H_0 eintritt
- wir vergleichen dann die beobachtete Anzahl mit der erwarteten
- wir quadrieren dazu die Abweichungen der Häufigkeiten relativ zur erwarteten Anzahl

- je größer der Abstand desto unwahrscheinlicher ist die Null-Hypothese
- Hypothesen sollten eindeutig sein
- Formulierung:
  - H_0 : allgemein: Die Stichprobenverteilung stimmt mit der theoretischen Verteilung überein
  - H_1 : allgemein: Die Stichprobenverteilung stimmt mit der theoretischen Verteilung nicht überein
- Formel: $\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{I} \frac{(h_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i}$
- ist unter H_0 approximativ χ^2-verteilt mit f = I - 1 -k

- k = Anzahl der zu schätzenden Modellparameter
- Anwendbar für $n \cdot \pi_i \geq 1$ für alle Kategorien und $n \cdot \pi \geq 5$ für mindestens 80% aller Kategorien
- Annahmebereich: $\{ v / v \leq c \}$
- Ablehnbereich: $\{ v / v > c \}$

Beispiel

Wir haben einen Würfelwurf beobachtet. Die geworfenen Augenzahlen traten wie folgt auf: 1 (19x), 2 (13x), 3 (14x), 4 (12x), 5 (17x), 6 (15x). Ist der Würfel ideal ($\alpha = 0.05$) ?

Lösung:

1. Aufstellen der Hypothesen
   - H_0: Die Stichprobenverteilung stimmt mit der theoretischen Verteilung überein. Die Stichprobe folgt einer diskreten Gleichverteilung, der Würfel ist ideal.
   - H_1: Die Stichprobenverteilung stimmt mit der theoretischen Verteilung nicht überein. Die Stichprobe folgt nicht einer diskreten Gleichverteilung, der Würfel ist nicht ideal.

i	Augenzahl	h_i	π_i	$n \cdot \pi_i$	$(h_i - n \cdot \pi_i)$	$(h_i - n \cdot \pi_i)^2$	$\frac{(h_i - n\cdot\pi_i)^2}{n\cdot\pi_i}$
1	1	19	0,17	15	4	16	1,07
2	2	13	0,17	15	-2	4	0,27
3	3	14	0,17	15	-1	1	0,07
4	4	12	0,17	15	-3	9	0,6
5	5	17	0,17	15	2	4	0,27
6	6	15	0,17	15	0	0	0
		90			0	34	2,267

1 - α-Fraktile der χ^2-Verteilung

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0050	0	0,01	0,07	0,21	0,41	0,68	0,99	1,34	1,73	2,16
0,0100	0	0,02	0,11	0,3	0,55	0,87	1,24	1,65	2,09	2,56
0,0250	0	0,05	0,22	0,48	0,83	1,24	1,69	2,18	2,7	3,25
0,0500	0	0,1	0,35	0,71	1,15	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94
0,1000	0,02	0,21	0,58	1,06	1,61	2,2	2,83	3,49	4,17	4,87
0,5000	0,45	1,39	2,37	3,36	4,35	5,35	6,35	7,34	8,34	9,34
0,9000	2,71	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
0,9500	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,9750	5,02	7,38	9,35	11,14	12,83	14,45	16,01	17,53	19,02	20,48
0,9900	6,63	9,21	11,34	13,28	15,09	16,81	18,48	20,09	21,67	23,21
0,9950	7,88	10,6	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28	21,95	23,59	25,19

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,0050	2,6	3,07	3,57	4,07	4,6	5,14	5,7	6,26	6,84	7,43
0,0100	3,05	3,57	4,11	4,66	5,23	5,81	6,41	7,01	7,63	8,26
0,0250	3,82	4,4	5,01	5,63	6,26	6,91	7,56	8,23	8,91	9,59
0,0500	4,57	5,23	5,89	6,57	7,26	7,96	8,67	9,39	10,12	10,85
0,1000	5,58	6,3	7,04	7,79	8,55	9,31	10,09	10,86	11,65	12,44
0,5000	10,34	11,34	12,34	13,34	14,34	15,34	16,34	17,34	18,34	19,34
0,9000	17,28	18,55	19,81	21,06	22,31	23,54	24,77	25,99	27,2	28,41
0,9500	19,68	21,03	22,36	23,68	25	26,3	27,59	28,87	30,14	31,41
0,9750	21,92	23,34	24,74	26,12	27,49	28,85	30,19	31,53	32,85	34,17
0,9900	24,72	26,22	27,69	29,14	30,58	32	33,41	34,81	36,19	37,57
0,9950	26,76	28,3	29,82	31,32	32,8	34,27	35,72	37,16	38,58	40

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0,0050	8,03	8,64	9,26	9,89	10,52	11,16	11,81	12,46	13,12	13,79
0,0100	8,9	9,54	10,2	10,86	11,52	12,2	12,88	13,56	14,26	14,95
0,0250	10,28	10,98	11,69	12,4	13,12	13,84	14,57	15,31	16,05	16,79
0,0500	11,59	12,34	13,09	13,85	14,61	15,38	16,15	16,93	17,71	18,49
0,1000	13,24	14,04	14,85	15,66	16,47	17,29	18,11	18,94	19,77	20,6
0,5000	20,34	21,34	22,34	23,34	24,34	25,34	26,34	27,34	28,34	29,34
0,9000	29,62	30,81	32,01	33,2	34,38	35,56	36,74	37,92	39,09	40,26
0,9500	32,67	33,92	35,17	36,42	37,65	38,89	40,11	41,34	42,56	43,77
0,9750	35,48	36,78	38,08	39,36	40,65	41,92	43,19	44,46	45,72	46,98
0,9900	38,93	40,29	41,64	42,98	44,31	45,64	46,96	48,28	49,59	50,89
0,9950	41,4	42,8	44,18	45,56	46,93	48,29	49,64	50,99	52,34	53,67

- Kritischer Wert: 2,267
- Wert der χ^2-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden: c $=$ 11,07
- Annahme von H_0

Aufgabe:

Ein Mieterverein in MD kämpfte vor einiger Zeit gegen die Aufhebung der Mietpreisbindung für Altbauwohnungen. Alles, was er jedoch erreichen konnte, war eine Einigung darüber, daß der Mietpreis jährlich um max. 5% angehoben werden darf. Ein Jahr nach Inkrafttreten des Gesetzes veröffentlicht der Verein "Baulöwen und Großgrundbesitzer" folgende Meldung:
"Entgegen aller Befürchtungen der Mieter lag die durchschnittliche Mietpreissteigerung in den Altbauwohnungen im letzten Jahr nur bei 2,5%. Ferner ist festzustellen, daß die Höhe der einzelnen Mietpreissteigerungen einer Gleichverteilung innerhalb des vereinbarten Bereiches folgt".

Aufgabe:

Der Mieterverein bezweifelt diese Zahlen und führt deshalb selbst eine Erhebung vom Umfang n=100 durch. Die Erhebung brachte folgendes Ergebnis:

Mietpreissteigerung in %	h_i
0-1	0
1-2	0
2-3	10
3-4	10
4-5	40
über 5	40

1. Mit welchem statistischen Testverfahren kann der Mieterverein die Verteilungsannahme der Gegenseite überprüfen.
2. Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test. Berechnen Sie dafür die untere und obere Grenze der von der Gegenseite behaupteten Verteilung.
3. Wie lautet die Testfunktion für diesen Test?
4. Wie ist diese Testfunktion unter H_0 verteilt?
5. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test bei einer Irrtumswahrscheinlichket von 0,5 %.
6. Wie lautet die Testentscheidung?
7. Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt!