Qualitätsmanagement

Übung 10

17. Juni 2008

Gütefunktion:

- Wollen wir bei einem Test bei vorgegebenen Signifikanzniveau jedem Wert die Wahrscheinlichkeit für das Ablehnen der Nullhypothese zuordnen so müssen wir die Gütefunktion berechnen.
- $g(\mu) = P(''H_1''/H_0) = \alpha$
- Formel: $g(\mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Merke:

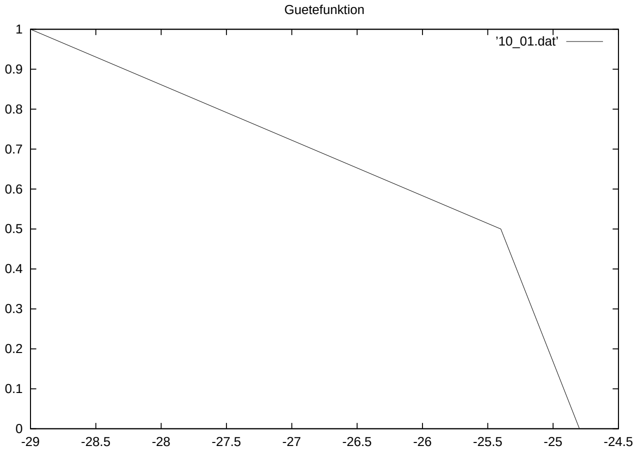
- Die Gütefunktion ist keine Dichtefunktion.
- Eine Erhöhung von n macht β kleiner, d.h. die Gütefunktion wird steiler.
- Der Test wird trennschärfer je steiler die Gütefunktion.

Beispiel für die Gütefunktion:

"Kühlschrankbeispiel" von der 9. Übung:
$\sigma = 2$; n = 100; $\overline{X}$=-25,4
Die Werte der Gütefunktion für -24,8°C, -25,4°C und -29,0°C errechnen sich wie folgt:

- $g(\mu = \text{-24,8}) = P(\overline{X} < -25,4 | \mu = \text{-24,8})$
  $= P(V < \frac{-25{,}4+24{,}8}{0{,}2}) = P(V < \text{-3}) = 1 - P(V + 3)$
  $= 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135$
- $g(\mu = \text{-25,4}) = P(\overline{X} < -25,4 | \mu = \text{-25,4})$
  $= ... = P(V < 0) = 0{,}5$
- $g(\mu = \text{-29,0}) = P(\overline{X} < -25,4 | \mu = \text{-29,0})$
  $= ... = P(V < 18) = 1$

Skizze der Gütefunktion



Test auf π

- $(X_1, ..., X_n)$ einfache Stichprobe
- X_i sei Bernoulliverteilt mit π (i=1,...,n)
- $E(X_i = \pi)$; $Var(X_i) = \pi \cdot (1 - \pi)$
- $Y = \sum X_i$ ist B(n;π)
- $E(Y) = n \cdot \pi$;$Var(Y) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$

Beispiel:

Der in den neuen Bundesländern nicht sehr beliebte Minister Ede plant für das Frühjahr eine Reise in den Osten Deutschlands, wo er auf Kundgebungen über den Transrapid reden will. Ede hält seine Reise aber nur dann für lohnenswert, wenn er damit rechnen kann, bei mehr als 80% seiner Kundgebungen nicht mit Eiern beworfen zu werden.

Finden Sie mit einem Binomialtest (α= 0,05; n=30) heraus, ob er die Reise antreten soll oder nicht. Obwohl der Minister ein Typ ist, der schnell beleidigt ist und auch eine Lebensmittelallergie gegen Eier hat, steht jedoch für ihn die Gefahr eines Popularitätsverlustes im Falle des Absagens seiner Reise deutlich im Vordergrund. Daher möchte er das Risiko, sich fälschlicherweise gegen die Reise zu entscheiden, unbedingt so klein wie möglich halten.

Beispiel:

1. Stellen Sie die Hypothese für diesen Test auf.
2. Wie lautet die Prüfgröße formal und verbal. Wie ist diese unter H_0 verteilt?
3. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test.
4. Wie groß ist ungünstigstenfalls die exakte Wahrscheinlichkeit, sich bei diesem Test fälschlicherweise für H_1 zu entscheiden?
5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung bei diesem Test, falls es in Wahrheit bei a. 90% und b. 70% der Kundgebungen zu Eierwürfen kommt.
6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Reise berechtigterweise abzusagen, falls es in Wahrheit bei 65% der Kundgebungen zu Eierwürfen kommen sollte.

Lösung zum Beispiel:

1. $H_0 : \pi \leq \pi_0$
   $H_1 : \pi > \pi_0$
   α = P("Reise nicht antreten" | alles o.k)
2. Y: "Anzahl der Kundgebungen bei denen mit Eiern geworfen wird, bei einer Zufallsstichprobe vom Umfang n=30"
   Y $\sim$ B(n;π_0) $\sim$ B(30;0,2)
3. A = { y| y $\leq$ 10 }
   B = { y| y > 10 }
4. α_{exakt} = 0,0256
5. P("H_1"$|\pi = 0.1 \in H_0) = \alpha_{\pi=0,1}$ = 0,0001
   P("H_0"$|\pi = 0.3 \in H_1) = \beta_{\pi=0,3}$ = 0,7304
6. P("H_1"$|\pi = 0.65 \in H_1)$ = 1 - $\beta_{\pi=0,65}$ = 0,9996

Hinweis zum Annahme- oder Ablehnbereich:

Verteilung	Nullhypothese	Gegenhypothese	Konfidenzintervall	Suche in F(x) nach	c
B(n;π)	$H_0 : \pi \leq \pi_0$	$H_1 : \pi > \pi_0$	α	100 % - α %	
B(30;0,2)	$H_0 : \pi \leq \pi_0$	$H_1 : \pi > \pi_0$	$\alpha = 5\%$	schauen in B(30;0,2) nach 0,95	10
B(n;π)	$H_0 : \pi \geq \pi_0$	$H_1 : \pi < \pi_0$	α	α %	
B(30;0,2)	$H_0 : \pi \geq \pi_0$	$H_1 : \pi < \pi_0$	$\alpha = 5\%$	schauen in B(30;0,2) nach 0,05	3

Hinweis zur Gütefunktion:

Beispiel für B(30;0,3); A: $\{y/y \geq 5\}$ und $H_0 : \pi \geq \pi_0$

π	gesuchter Wert in Verteilungsfunktion	g(π)	bedeutet
0,1	B(30;0,1) für P(X $\leq$ 4)	g(0,1) $=$ 0,8245	1 - β
0,2	B(30;0,2) für P(X $\leq$ 4)	g(0,2) $=$ 0,2552	1 - β
0,3	B(30;0,3) für P(X $\leq$ 4)	g(0,3) $=$ 0,0302	α_{exakt}
0,4	B(30;0,4) für P(X $\leq$ 4)	g(0,4) $=$ 0,0015	α
0,5	B(30;0,5) für P(X $\leq$ 4)	g(0,5) $=$ 0	α

Achtung: auch hier wird die Verteilungsfunktion verwendet !!!

Aufgabe 1:

Von der Pharma-Industrie wurde ein neues Präparat gegen das bisher als unheilbar geltende und weltweit verbreitete "Nasenjucken" entwickelt, wobei vom Hersteller versprochen wird, daß bei höchstens 65 % der mit diesem Präparat behandelten Patienten kein Heilerfolg eintritt.
Da Sie als behandelnder Arzt es mit der Kostendämpfung im Gesundheitswesen sehr genau nehmen, wollen Sie dieses sehr teure Präparat in Zukunft Ihren Patienten nur dann verschreiben, wenn man den Angaben des Herstellers trauen kann und die Krankenkassen nicht zur Kasse gebeten werden für die Bezahlung eines Präparats, dessen Heilungsquote minimal ist.

Sie beschließen, dieses Präparat an Ihren 19 Patienten, die an "Nasenjucken" leiden, auszuprobieren (Zufallsstichprobe) und mit diesen Zahlen die Angaben des Herstellers zu testen (α=0,01). Von dieser Testentscheidung wollen Sie die Einführung des Präparats abhängig machen.

Aufgabe 1:

1. Stellen Sie die Hypothesen für diesen Test auf!
2. Geben Sie die Prüfgröße für diesen Test formal und verbal an!
3. Wie ist diese Prüfgröße unter H_0 verteilt?
4. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sie sich aufgrund des Testergebnisses

5. nicht für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit sogar 50% betragen sollte?
6. für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit nur 10% betragen sollte?
7. nicht für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit 35% betragen sollte?
8. für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit 40% betragen sollte?

Zweiseitiger Test auf π - Beispiel

1. $H_0 : \pi = \pi_0 (= 0,3)$
   $H_1 : \pi \neq \pi_0 (= 0,3)$
2. $\alpha = 0{,}05$
3. Y:"Anzahl ... bei n = 30"
4. Y ist unter H_0 B(n;π_0) $\sim$ B(30;0,3)
   Prüfverteilung ist nicht symetrisch, das bedeutet: Werte einzeln herausnehmen.

Berechnung des Annahme- und Ablehnungsbereichs:

X	$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$	Reihenfolge	$\sum$
0	0,0000		
1	0,0003		
2	0,0018		
3	0,0072		
4	0,0209		
5	0,0464		
...			
14	0,0232		
15	0,0105		
16	0,0043		
17	0,0015		
18	0,0004		
19	0,0002		
20	0,0000		

Berechnung des Annahme- und Ablehnungsbereichs:

X	$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $= \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$	Reihenfolge	$\sum$
0	0,0000		
1	0,0003	2	0,0005
2	0,0018	5	0,0042
3	0,0072	7	0,0157
4	0,0209	9	0,0471 $= \alpha_{exakt}$
5	0,0464		
...			
14	0,0232		0,0703 (Überschreitung von α)
15	0,0105	8	0,0262
16	0,0043	6	0,0085
17	0,0015	4	0,0024
18	0,0004	3	0,0009
19	0,0002	1	0,0002
20	0,0000		

Annahmebereich: $\{y/5 \leq y \leq 14\}$

B: $\{y/y < 5 \text{ oder } y > 14\}$

Gütefuntkion:

π	P("H_0" / π	Berechnung aus	G(π)
0,1	0,1755	B(30;0,1) mit P(X $\leq$ 14) - P(X $\leq$ 4)	0,8245 ($=$ 1 - $\beta(\pi)$)
0,2	0,7446	B(30;0,2) mit P(X $\leq$ 14) - P(X $\leq$ 4)	0,2554 ($=$ 1 - $\beta(\pi)$)
0,3	0,9529	B(30;0,3) mit P(X $\leq$ 14) - P(X $\leq$ 4)	0,0471 ($= \alpha_{exakt}$)
0,4	0,8231	B(30;0,4) mit P(X $\leq$ 14) - P(X $\leq$ 4)	0,1769 ($=$ 1 - $\beta(\pi)$)
0,5	0,4278	B(30;0,5) mit P(X $\leq$ 14) - P(X $\leq$ 4)	0,5722 ($=$ 1 - $\beta(\pi)$)

Aufgabe 2:

Es wird ein zweiseitiger Test auf $\pi_0 = 0{,}3$ bei einem Stichprobenumfang von n=20 und einem Signifikanzniveau von α= 0,002 durchgeführt. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test und berechnen Sie g(π) an den Stellen 0,1 und 0,3!