

# Qualitätsmanagement

## Übung 5

25. Mai 2007



# Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt
- Bernoulli-Verteilung
- die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch sei  $\pi$
- die negative Binomialverteilung beantwortet die Frage: mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir bei  $x$  Versuchen  $r$  Erfolge

$$P(X = x + r) = \frac{(x + r - 1)!}{(r - 1)! \cdot x!} \cdot \pi^{r-1} \cdot (1 - \pi)^x \cdot \pi$$

## Beispiel:

Beispiel:

Bei einem Wurfspiel ermitteln Sie eine Wahrscheinlichkeit von  $1/5$  für das Ereignis, ins Schwarze zu treffen. Nehmen Sie an, daß alle Würfe stochastisch unabhängig sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei 7 Würfen 3mal ins Schwarze zu treffen?

## Beispiel:

- $x=7$
- $r=3$
- $\pi = 0.2$

$$\begin{aligned}P(X = 7 + 3) &= \frac{(7 + 3 - 1)!}{(3 - 1)! \cdot 7!} \cdot 0.2^{3-1} \cdot (1 - 0.2)^7 \cdot 0.2 \\ &= \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot 0.2^2 \cdot (0.8)^7 \cdot 0.2 \\ &= 0.06\end{aligned}$$

## Aufgabe:

In einer Universitätsklinik hat man sich auf die Behandlung von Tumoren mit Kohlenstoff-Ionen spezialisiert. Alle Versuche den Tumor mit einem Teilchenbeschleuniger zu treffen seien unabhängig voneinander verteilt. Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Beschuß ("Treffer") liegt bei  $\pi=0.09$ . Wurde der Tumor 4x erfolgreich getroffen kann die Behandlung als abgeschlossen bezeichnet werden.

Eine Tumorbehandlung besteht aus 10 Beschüssen und wird vollständig von der Krankenkasse bezahlt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Krankenkasse 2 Behandlungen übernimmt und die Behandlung insgesamt als erfolgreich eingestuft werden kann.



## Beispiel:

Für eine feste Anzahl von  $n$ -Personen sei die Wahrscheinlichkeit  $\pi$ , daß diese (eine Person) in die Bäckerei geht - bei unabhängigen Versuchen.

$X$ : "Anzahl der Personen, die zu dieser Zeit beim Bäcker einkaufen."

Frage: wie ist  $X$  verteilt?

$X$  ist  $B(n; \pi)$

Für  $n = 10$ ,  $x=3$  und  $\pi=0.2$  gilt:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.2^3 (0.8)^7 \quad (1)$$

## Beispiel:

Für  $n = 100$ ,  $x=3$  und  $\pi=0.02$  gilt:

$$P(X = 3) = \binom{100}{3} 0.02^3 (0.98)^{97} \quad (2)$$

Für  $n = 949$ ,  $x=3$  und  $\pi = \frac{1}{365}$  gilt:

$$P(X = 3) = \binom{949}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{946} \quad (3)$$



## Poissonverteilung:

Es gilt:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \pi \rightarrow 0 \\ n \cdot \pi = \text{const}}} \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \\ \approx \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

für die erwartete (durchschnittliche) Anzahl von "Erfolgen"  $\lambda$  gilt  $n \cdot \pi$  und  $x = 0, 1, \dots$



## Poissonverteilung:

Lösung zum Beispiel:

Für  $n = 949$ ,  $x=3$  und  $\pi = \frac{1}{365}$  gilt:

$$\begin{aligned} X &= B(n; \pi) = B(949; \frac{1}{365}) \\ &\approx P(\lambda) = P(949 \cdot \frac{1}{365}) = P(2.6) \\ &= \frac{2.6^3}{3!} \cdot e^{-2.6} \end{aligned}$$

# Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses ist konstant
  - ▶ Beispiel: in 2 Stunden kommen im Durchschnitt 240 Personen in ein Kaufhaus
  - ▶ das bedeutet dass in einer Minute im Durchschnitt 2 Personen eintreffen



# Poissonverteilung:

- Erwartungswert  $E(x) = \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- Approximation bei  $B(n;\pi) \rightarrow n \geq 30$
- Approximation bei  $B(n;\pi) \rightarrow \pi \leq 0.05$

## Aufgabe 2:

In einem Lackierprozeß wird Stahl mit einer Farbe besprüht. Auf 200m Stahl werden 60 falsch lackierte Stellen gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2, 3 Fehler auf 1 Meter Stahl? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man bis zu 3 Fehler finden.