5.Übung Qualitätsmanagement

Henner Graubitz

21. November 2006

Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt

Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt
- Bernoulli-Verteilung

Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt
- Bernoulli-Verteilung
- die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch sei π

Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt
- Bernoulli-Verteilung
- die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch sei π
- die negativen Binomialverteilung beantwortet die Frage: mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir bei x Versuchen r Erfolge

Was ist die negative Binomialverteilung

- sie wird auch Pascal-Verteilung genannt
- Bernoulli-Verteilung
- die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch sei π
- die negativen Binomialverteilung beantwortet die Frage: mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir bei x Versuchen r Erfolge

$$P(X = x + r) = \frac{(x + r - 1)!}{(r - 1)! \cdot x!} \cdot \pi^{r-1} \cdot (1 - \pi)^x \cdot \pi$$

Beispiel:

Beispiel:
Bei einem Wurfpfeil-Spiel ermitteln Sie eine Wahrscheinlichkeit von 1/5 für das Ereignis, ins Schwarze zu treffen. Nehmen Sie an, daß alle Würfe stochastisch unabhängig sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei 7 Würfen 3mal ins Schwarze zu treffen?

Beispiel:

- $x=7$

Beispiel:

- $x=7$
- $r=3$

Beispiel:

- x=7
- r=3
- $\pi = 0.2$

Beispiel:

- x=7
- r=3
- $\pi = 0.2$

$$P(X = 7 + 3) = \frac{(7 + 3 - 1)!}{(3 - 1)! \cdot 7!} \cdot 0.2^{3-1} \cdot (1 - 0.2)^7 \cdot 0.2$$

$$= \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot 0.2^2 \cdot (0.8)^7 \cdot 0.2$$

$$= 0.06$$

Aufgabe:

In einer Universitätsklinik hat man sich auf die Behandlung von Tumoren mit Kohlenstoff-Ionen spezialisiert. Alle Versuche den Tumor mit einem Teilchenbeschleuniger zu treffen seien unabhängig voneinander verteilt. Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Beschuß ("Treffer") liegt bei $\pi = 0.09$. Wurde der Tumor 4x erfolgreich getroffen kann die Behandlung als abgeschlossen bezeichnet werden.
Eine Tumorbehandlung besteht aus 10 Beschüssen und wird vollständig von der Krankenkasse bezahlt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Krankenkasse 2 Behandlungen übernimmt und die Behandlung insgesamt als erfolgreich eingestuft werden kann.

Beispiel:

Für eine feste Anzahl von n-Personen sei die Wahrscheinlichkeit π, daß diese (eine Person) in die Bäckerei geht - bei unabhängigen Versuchen.
X: "Anzahl der Personen, die zu dieser Zeit beim Bäcker einkaufen."
Frage: wie ist X verteilt?

Beispiel:

Für eine feste Anzahl von n-Personen sei die Wahrscheinlichkeit π, daß diese (eine Person) in die Bäckerei geht - bei unabhängigen Versuchen.
X: "Anzahl der Personen, die zu dieser Zeit beim Bäcker einkaufen."
Frage: wie ist X verteilt?
X ist B(n;π)
Für n = 10, x=3 und π=0.2 gilt:

$$P(X=3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} 0.2^3 (0.8)^7 \quad (1)$$

Beispiel:

Für n = 100, x=3 und π=0.02 gilt:

$$P(X = 3) = \binom{100}{3} 0.02^3 (0.98)^{97} \tag{2}$$

Für n = 949, x=3 und $\pi = \frac{1}{365}$ gilt:

$$P(X = 3) = \binom{949}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{946} \tag{3}$$

Poissonverteilung:

Es gilt:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \pi \to 0 \\ n - \pi = const}} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

$$\approx \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

für die erwartete (durchschnittliche) Anzahl von "Erfolgen" λ gilt n $\cdot \pi$ und x $=$ 0,1,...

Poissonverteilung:

Lösung zum Beispiel:
Für n $=$ 949, x=3 und $\pi = \frac{1}{365}$ gilt:

$$\begin{aligned} X = B(n;\pi) &= B(949;\frac{1}{365}) \\ \approx P(\lambda) = P(949 \cdot \frac{1}{365}) &= P(2.6) \\ &= \frac{2.6^3}{3!} \cdot e^{-2.6} \end{aligned}$$

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses ist konstant

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses ist konstant
  - Beispiel: in 2 Stunden kommen im Durchschnitt 240 Personen in ein Kaufhaus

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses ist konstant
  - Beispiel: in 2 Stunden kommen im Durchschnitt 240 Personen in ein Kaufhaus
  - das bedeutet dass in einer Minute im Durchschnitt 2 Personen eintreffen

Poissonverteilung:

Benutzung der Poissonverteilung bei:

- Zahlen seltener und unabhängiger Ereignisse (Verteilung der seltenen Ereignisse)
- Beschreibt die Anzahl von Ereignissen innerhalb eines Intervalls
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses ist konstant
  - Beispiel: in 2 Stunden kommen im Durchschnitt 240 Personen in ein Kaufhaus
  - das bedeutet dass in einer Minute im Durchschnitt 2 Personen eintreffen

Poissonverteilung:

- Erwartungswert $E(x) = \lambda$

Poissonverteilung:

- Erwartungswert $\mathrm{E(x)} = \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Poissonverteilung:

- Erwartungswert E(x) $= \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- Approximation bei B(n;π) $\rightarrow n \geq 30$

Poissonverteilung:

- Erwartungswert E(x) $= \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- Approximation bei B(n;π) $\rightarrow n \geq 30$
- Approximation bei B(n;π) $\rightarrow \pi \leq 0.05$

Poissonverteilung:

- Erwartungswert E(x) $= \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- Approximation bei B(n;π) $\rightarrow n \geq 30$
- Approximation bei B(n;π) $\rightarrow \pi \leq 0.05$

Aufgabe 2:

In einem Lackierprozeß wird Stahl mit einer Farbe besprüht. Auf 200m Stahl werden 60 falsch lackierte Stellen gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2, 3 Fehler auf 1 Meter Stahl? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man bis zu 3 Fehler finden.