9.Übung Qualitätsmanagement

Henner Graubitz

9. Januar 2007

Testtheorien und Hypothesen:

Beispiel 1: Das Wetter ist schön, aber es wurde Regen angesagt.
Frage: Sollen wir einen Schirm mitnehmen oder nicht.

		Realität Regen	kein Regen
"Entscheidung"	"Schirm mitnehmen"	ok	Fehler! (lästig)
	"keinen Schirm mitnehmen"	Fehler! Ganz schlimm ! Tod!	ok

Testtheorien und Hypothesen:

Beispiel 2: Eine Kreuzung hat keine Ampel. Wir kommen mit unserem Pkw an die Kreuzung:

		Realität Auto von rechts	kein Auto von rechts
"Entscheidung"	"bremsen"	ok	Fehler! (lästig)
	"durchführen"	Fehler! Ganz schlimm ! Tod!	ok

Testtheorien und Hypothesen:

- Arbeitshypothesen: H_0 (Nullhypothesen)
- Alternativhypothesen: H_1 (Gegenhypothesen)
- Einteilung der Testtheorien in parametrisch und nicht parametrisch
- Parameterraum: Bezeichnung als Ω
- $H_0 \subset \Omega$; $H_1 \subset \Omega$ mit $H_0 \cap H_1 = \varnothing$, $H_0 \cup H_1 = \Omega$
- wir müssen uns also entweder für H_0 oder H_1 entscheiden

		Realität H_0	H_1
"Entscheidung"	"H_0"	ok	Fehler 2. Art - β Fehler
	"H_1"	Fehler 1. Art - α Fehler	ok

- ("H_0" / H_0) = berechtigte Beibehaltung von H_0 = 1 - α
- ("H_1" / H_1) = berechtigte Ablehnung von H_1 = 1 - β
- ("H_1" / H_0) = unberechtigte Ablehnung von H_0 = α
  also immer den schlimmsten Fehler (Worst-Case) in Betracht ziehen
- ("H_0" / H_1) = unberechtigte Beibehaltung von H_0 = β

Beispiel: Zweiseitiger Test auf μ

Tablette mit Wirkstoff 30 mg = Normwert (Sollwert) Aufgrund von Reklamationen glaubt man, daß der Wirkstoff nicht mehr eingehalten wird. Durch einen Test mit n=100 soll überprüft werden, ob die Maschine den Wert einhält oder nicht. Aus Erfahrung weiß man, daß die Zufallsvariable X = "Menge des betreffenden Wirkstoffs einer produzierten Tablette" normalverteilt ist mit N(μ, σ^2) mit $\sigma^2 = 9mg^2$. Bestimmen Sie in einem 95% Konfidenzintervall den Annahme- und Ablehnungsbereich.

Lösung:

1. Frage: Formulieren Sie die Hypothesen dieses Tests:
   $H_0: \mu = \mu_0 \; (=30) \Leftrightarrow \mu - \mu_0 = 0$
   $H_1: \mu \neq \mu_0 \; (=30)$
2. Frage: Wie lautet die Prüfgröße formal und verbal:
   $\overline{X}$:"Durchschnittliche Wirkstoffmenge einer produzierten Tablette bei einer einfachen Stichprobe vom Umfang n=100"
3. Frage: Wie ist die Prüfgröße verteilt:
   $\overline{X}$ ist unter H_0 $\mathrm{N}(\mu; \frac{\sigma^2}{n}) \sim \mathrm{N}(30;0.09)$
4. Wie lautet der Annahmebereich:
   $\{\; \overline{X} / \overline{X}_{kritischlinks} \leq \overline{X} \leq \overline{X}_{kritischrechts} \;\}$
   $\{\; \overline{X} / \mu_0 - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\}$

5. Bestimmung der Konstante c:
   Typische Werte für Konfidenzintervalle sind 90%, 95%, 99%. Unter Zuhilfenahme der Standardnormalverteilung erhalten wir folgende c-Werte:

90%	1,65
95%	1,96
99%	2,58

z *	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1*	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2*	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3*	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4*	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5*	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6*	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7*	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8*	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9*	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0*	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

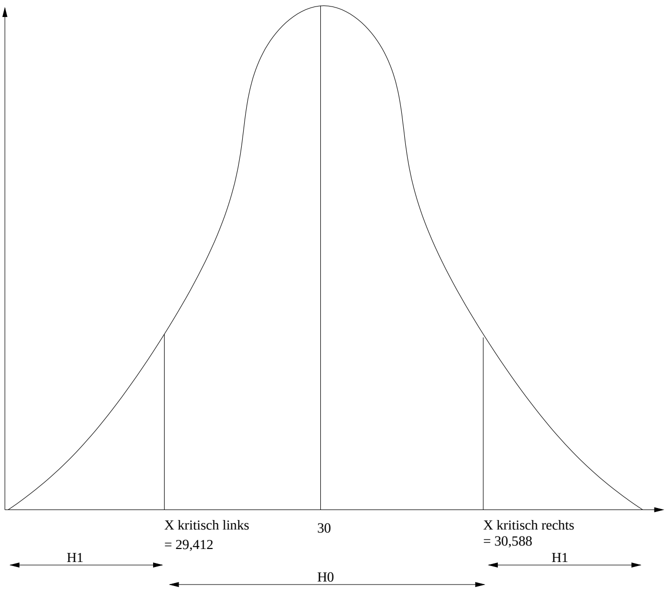
Lösung:

$\mu_0 = 30$
$\sigma^2 = 9$
$n = 100$

Annahmebereich: $\{ \overline{X} / \mu_0 - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \}$

$\{ \overline{X} / 30 - 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} \leq \overline{X} \leq 30 + 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} \}$

$= \{ \overline{X} / 29,412 \leq \overline{X} \leq 30,588 \}$


X kritisch links
= 29,412
30
X kritisch rechts
= 30,588
H1
H0
H1

Aufgabe 1:

Für den Durchmesser von Wellen ist ein Sollwert von 200mm vorgeschrieben. Außerdem ist bekannt, daß die Produktion normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 5mm. Um die Produktion zu kontrollieren zog der Kontrolleur Hans Meiser eine Zufallsstichprobe von n=100. Das arithmetische Mittel aus diesen 100 Stück ergab eine Abweichung vom Sollwert von +0,4 mm. Es soll die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ getestet werden auf einen Signifikanzniveau von 5%.

1. Geben Sie den Verwerfungsbereich B an!
2. Wie entscheidet sich Hans Meiser.
3. Ein zweiter Kontrolleur berechnet aus einer zweiten Zufallsstichprobe von $n = 100$ ein $\overline{X} = 202mm$. Wie entscheidet sich der zweite Kontrolleur (bei gleichen Entscheidungskriterien)?
4. Welchen Fehler könnte der zweite Kontrolleur bei seiner Entscheidung begangen haben.

Beispiel: Einseitiger Test auf μ

- Überlegungen, die für einen zweiseitigen Test angestellt werden können gelten auch für einen einseitigen Test.
- Beispiel: Test von Medikamenten und Abweichung von Wirkstoffen
- Eine geringe Dosis ist für den Patienten ungefährlich, eine zu hohe Dosis lebensgefährlich.

Beispiel: Einseitiger Test auf μ

Ein Unternehmen stellt Spezialgefrierschränke her, die zur Konservierung bestimmter Güter verwendet werden. Die Soll-Kühltemperatur beträgt für derartige Gefrierschränke -25°C. Da man weiß, daß die tiefgefrorenen Güter bei höheren Temperaturen leicht verderben, und da der potentielle Kundenstamm nicht sehr groß ist würde ein mangelhaftes Produkt, das also nicht tief genug kühlt, das Schlimmste, nämlich den Ruin der Firma, bedeuten. Aus Gründen der Vorsicht soll nun die Kühlleistung der Gefrierschränke an 100 zufällig aus der Produktion ausgewählten Gefrierschränken auf einem Signifikanzniveau von 2,275% getestet werden, um zu entscheiden, ob die Produktion weiterlaufen kann oder eine Konstruktionsänderung an den Geräten vorgenommen werden muß. Aus Erfahrung weiß man, daß die erreichte Kühltemperatur eines solchen Gefrierschrankes normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 2°C.

Aufgaben:

1. Wie lauten die Hypothesen für diesen Test? Begründen Sie Ihre Wahl in Form einer Risikobetrachtung!
2. Geben Sie die Prüfgröße formal und verbal sowie ihre Verteilung unter H_0 an!
3. Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt?
4. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test!
5. Die Zufallsstichprobe ergab eine mittlere Kühltemperatur pro Gerät von -26°C. Wie lautet die Testentscheidung?

Lösungen:

1. α = P("H_1" / H_0) = P("Kunden zufrieden" — Ruin)
   H_0: $\mu \geq \mu_0$ = -25°C
   H_1: $\mu < \mu_0$ = -25°C
   α= 2,275%
2. X_i:"Temperatur des i-ten Spezialgefrierschranken"$\sim$ N(μ; σ^2=4)
   $\overline{X}$: "Durchschnittliche Temperatur eines Spezialgefrierschrankes bei einer Zufallsstichprobe vom Umfang n=100" $\overline{X} \sim$ unter H_0 N (μ_0=-25; $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{100} =$ 0,04)
3. V = $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim$ unter H_0 N(0;1)
4. Annahmebereich: { $\overline{X} | \overline{X} \geq \mu_0 - c_{[1-\alpha]} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = - 25 - 2 $\frac{2}{\sqrt{100}}$ = -25,4 }
   bzw: { $v | v \geq -c_{[1-\alpha]}$ = -2 }
   Ablehnbereich: B: { $\overline{X} | \overline{X} < \mu_0 - c_{[1-\alpha]} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = - 25 - 2 $\frac{2}{\sqrt{100}}$ = -25,4 }
   bzw: { $v | v < -c_{[1-\alpha]}$ = -2 }
5. Da $\overline{X}$ = -26 $\in B \Rightarrow$ "H_1": Basierend auf einer Zufallsstichprobe von 100 Gefrierschränken konnte bei einem Signifikanzniveau von α=2.275% statistisch bewiesen werden, daß die durchschnittliche Temperatur der Geräte unter -25°C liegt. Somit ist keine Produktionsveränderung nötig.

Aufgabe 2:

Seit geraumer Zeit beklagen Umweltschützer die Verschmutzung der Seen durch die Abwässer der Haushalte - insbesondere durch den Phosphatgehalt der Waschmittel. So greifen sie auch eine bestimmte Firma an, da sie glauben, daß der zulässige Durchschnittswert von 18g pro Packung überschritten wird. Die Firma bestreitet dies energisch und verspricht den Umweltschützern, das Produkt vom Markt zu nehmen, falls sich statistisch zeigen läßt, daß der mittlere Phosphatgehalt ihres Produkts tatsächlich zu hoch ist. Die Firma will nun diesen Test durchführen und schlägt den Umweltschützern eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,001 vor, da man ja mit hoher Sicherheit ein richtiges Testergebnis bekommen würde. Die Umweltschützer akzeptieren dies, da ihnen die Argumentation völlig einleuchtet.
Die Varianz des Phosphatgehalts pro Packung wird mit 36 g^2 als bekannt vorausgesetzt.

1. Formulieren Sie die Hypothese für diesen Test!
2. Geben Sie die Prüfgröße formal und verbal an!
3. Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt?
4. Bestimmen Sie den Ablehnbereich für diesen Test! Bei der gezogenen Zufallsstichprobe von 36 Paketen ergab sich ein durchschnittlicher Phosphatgehalt von 20g.
5. Wie lautet die Testentscheidung?