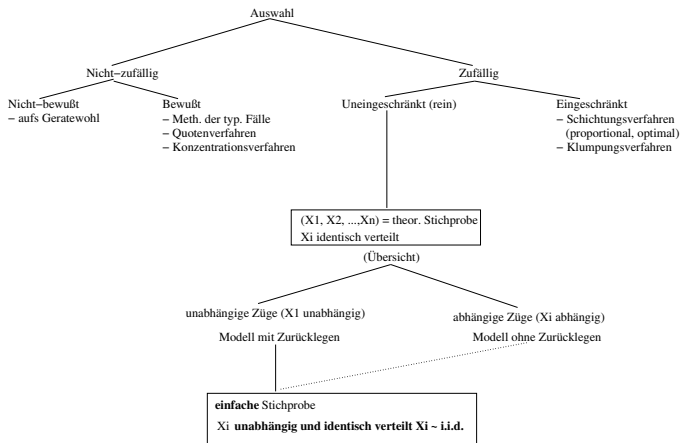


7. Übung Qualitätsmanagement

Henner Graubitz

5. Dezember 2006



Allgemeiner Fall:

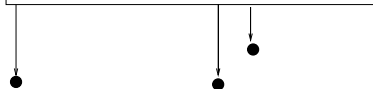
Grundgesamtheit



1. Auswahlvorgang: Teilerhebung



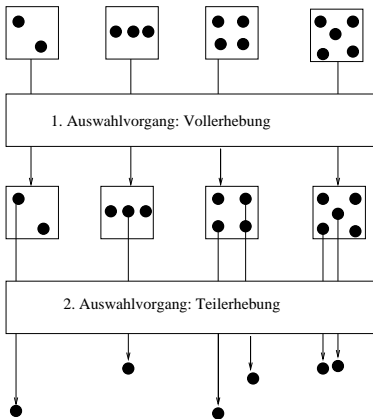
2. Auswahlvorgang: Teilerhebung



Stichprobe

Schichtungsverfahren:

Grundgesamtheit



Stichprobe

Klumpungsverfahren:

Grundgesamtheit



1. Auswahlvorgang: Teilerhebung



2. Auswahlvorgang: Vollerhebung



Stichprobe

Stichprobe:

- ▶ Entnimmt man aus einer Grundgesamtheit eine Teilmenge so bezeichnen wir in der Statistik diese Teilmenge als Stichprobe

Stichprobe:

- ▶ Entnimmt man aus einer Grundgesamtheit eine Teilmenge so bezeichnen wir in der Statistik diese Teilmenge als Stichprobe
- ▶ Unter Zuhilfenahme der Stichprobenstatistik können wir dann die Eigenschaften der Grundgesamtheit ermitteln bzw. schätzen

Stichprobe:

- ▶ Entnimmt man aus einer Grundgesamtheit eine Teilmenge so bezeichnen wir in der Statistik diese Teilmenge als Stichprobe
- ▶ Unter Zuhilfenahme der Stichprobenstatistik können wir dann die Eigenschaften der Grundgesamtheit ermitteln bzw. schätzen
- ▶ Geschätzt wird mit den Zufallsvariablen, z.B. Stichprobenmittelwert, Stichprobenanteil, Stichprobenvarianz



Stichprobe:

- ▶ Entnimmt man aus einer Grundgesamtheit eine Teilmenge so bezeichnen wir in der Statistik diese Teilmenge als Stichprobe
- ▶ Unter Zuhilfenahme der Stichprobenstatistik können wir dann die Eigenschaften der Grundgesamtheit ermitteln bzw. schätzen
- ▶ Geschätzt wird mit den Zufallsvariablen, z.B. Stichprobenmittelwert, Stichprobenanteil, Stichprobenvarianz
- ▶ Beispiel: Bundestagswahl



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge

Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)
- ▶ Erwartungswert "Himmel": $E(x_i) = \mu$; $Var(x_i) = \sigma^2$



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)
- ▶ Erwartungswert "Himmel": $\epsilon(x_i) = \mu$; $Var(x_i) = \sigma^2$
- ▶ Erwartungswert "Erde": $\epsilon(\bar{X}) = \mu$; $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)
- ▶ Erwartungswert "Himmel": $E(x_i) = \mu$; $Var(x_i) = \sigma^2$
- ▶ Erwartungswert "Erde": $E(\bar{X}) = \mu$; $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$
- ▶ Unverzerrtheit: Der Mittelwert einer Stichprobenverteilung ist gleich dem Mittelwert der Grundgesamtheit.



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)
- ▶ Erwartungswert "Himmel": $E(x_i) = \mu$; $Var(x_i) = \sigma^2$
- ▶ Erwartungswert "Erde": $E(\bar{X}) = \mu$; $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$
- ▶ Unverzerrtheit: Der Mittelwert einer Stichprobenverteilung ist gleich dem Mittelwert der Grundgesamtheit.
- ▶ Effizienz: Der Mittelwert der Stichprobenverteilung ist näher am Mittelwert der Grundgesamtheit als irgendein anderer unverzerrter Schätzer.



Eigenschaften einer Stichprobenverteilung:

- ▶ Himmel-Erde Bild: Himmel ist die Grundgesamtheit, Erde ist die Teilmenge
- ▶ \bar{X} (Erde) = $\frac{1}{n} \sum x_i = f(x_1, \dots, x_n)$ (Himmel)
- ▶ Erwartungswert "Himmel": $E(x_i) = \mu$; $Var(x_i) = \sigma^2$
- ▶ Erwartungswert "Erde": $E(\bar{X}) = \mu$; $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$
- ▶ Unverzerrtheit: Der Mittelwert einer Stichprobenverteilung ist gleich dem Mittelwert der Grundgesamtheit.
- ▶ Effizienz: Der Mittelwert der Stichprobenverteilung ist näher am Mittelwert der Grundgesamtheit als irgendein anderer unverzerrter Schätzer.
- ▶ Konsistenz: Je größer die Stichprobe (Anzahl) desto weniger weicht der Mittelwert der Stichprobe vom Mittelwert der Grundgesamtheit ab.



Aufgabe 1:

Aus einer Grundgesamtheit von $N=3$ Personen mit den Lebensalter 20, 22 und 24 werden Zufallsstichproben vom Umfang $n=2$ mit Zurücklegen gezogen.

1. Berechnen Sie das arithmetische Mittel μ und die Varianz σ^2 dieser Grundgesamtheit!
2. Wieviel 2-Tupel enthält der Stichprobenraum?
3. Listen Sie alle Elemente des Stichprobenraums, d.h. alle 2-Tupel die als Stichprobenergebnis möglich sind, auf!



Aufgabe 1 (Fortsetzung):

4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgender Stichprobenfunktionen:

4.1 $Y = \sum_{i=1}^2 X_i$ Berechnen Sie $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$!

4.2 $\bar{X} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 X_i$ Berechnen Sie $E(\bar{X})$ und $\text{Var}(\bar{Y})$!

4.3 $Z^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2$ Berechnen Sie $E(Z^2)$!

4.4 $S^2 = \frac{1}{2-1} \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2$ Berechnen Sie $E(S^2)$!



Tschebyscheffsche Ungleichung:

- ▶ Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert sehr gute Ergebnisse, wenn eine Verteilung unbekannt ist.

Tschebyscheffsche Ungleichung:

- ▶ Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert sehr gute Ergebnisse, wenn eine Verteilung unbekannt ist.
- ▶ Es gilt:
 - ▶ X ist beliebig verteilt mit $\epsilon(x) = \mu$; $\epsilon > 0$; $c > 0$
 - ▶ $\text{Var}(x) = \sigma^2$

$$P(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$



Beispiel:

Sei X : "Körpergewicht eines Koalabären in kg" mit $E(X) = 10$ und $\text{Var}(X) = 0,25$.

Sei Y : "Tragfähigkeit eines Astes in kg, den ein Koalabär besteigt" mit $E(Y) = 12$ und $\text{Var}(Y) = 0,75$.

Ist das Körpergewicht größer als die Tragfähigkeit des bestiegenen Astes, so fällt der Koalabär zu Boden und bricht sich das Genick. Eine weitere Gefahr geht von einer bestimmten Art von Giftschlangen aus, die auf den Ast schleicht und den Bären tötet. Die Schlange schleicht genau dann auf den Ast, falls die Tragfähigkeit es zuläßt. Das ist genau dann der Fall, wenn die Tragfähigkeit des Astes das Körpergewicht des Koalabären um mehr als 4 kg übersteigt. Koalabären suchen sich stets unabhängig von ihrem Körpergewicht einen Ast zum Schlafen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Koalabar ungestört auf einem Ast ausschlafen kann?



Lösung:

X: "Körpergewicht in kg" $E(X) = 10$ und $\text{Var}(X) = \frac{1}{4}$

Y: "Tragfähigkeit in kg" $E(Y) = 12$ und $\text{Var}(Y) = \frac{3}{4}$

- ▶ $Z = Y - X > 0 \Rightarrow$ Ast wird ohne Gefahr bestiegen
- ▶ $Z = Y - X > 4 \Rightarrow$ Gefahr durch Giftschlange
- ▶ $0 \leq Z = Y - X \leq 4 \Rightarrow$ Ungestörtes Ausschlafen
- ▶ X und Y stochastisch unabhängig
- ▶ $E(Z) = E(Y) - E(X) = 2$
- ▶ $\text{Var}(Z) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(X) = 1$
- ▶ $P(0 \leq z \leq 4) = ?$
- ▶ $P(E(Z) - c\sigma \leq Z \leq E(Z) + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = 2$
- ▶ $P(0 \leq z \leq 4) \geq 0,75$



Aufgabe 2:

Fritz Flink ist Leichtathlet und steht vor einem Qualifikationswettkampf im 400m Lauf. Aufgrund seines Trainingszustandes beträgt der Erwartungswert für seine Laufzeit 50 Sekunden mit einer Varianz von 3 *Sekunden*². Sepp Sprint, sein Vereinskollege und Wettkampfrivale, kann aufgrund einer Verletzung nicht starten. Er hält den alten Bezirksrekord von 46,54 Sekunden, den er nicht an Fritz verlieren möchte. Bei einer Zeit von über 53,46 Sekunden wäre Fritz jedoch nicht für die Landesmeisterschaft qualifiziert, was Sepp im Hinblick auf das Ansehen des Vereins peinlich wäre.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß keine von Sepps Befürchtungen eintritt?

Anmerkung: Rechnen Sie mit $\sqrt{3} = 1,73$