

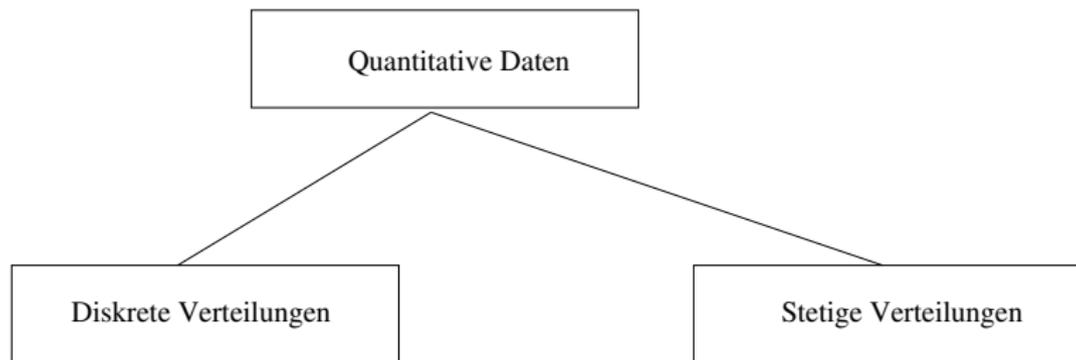
# Qualitätsmanagement

## Übung 6

5. Juni 2007



# Grafische Übersicht



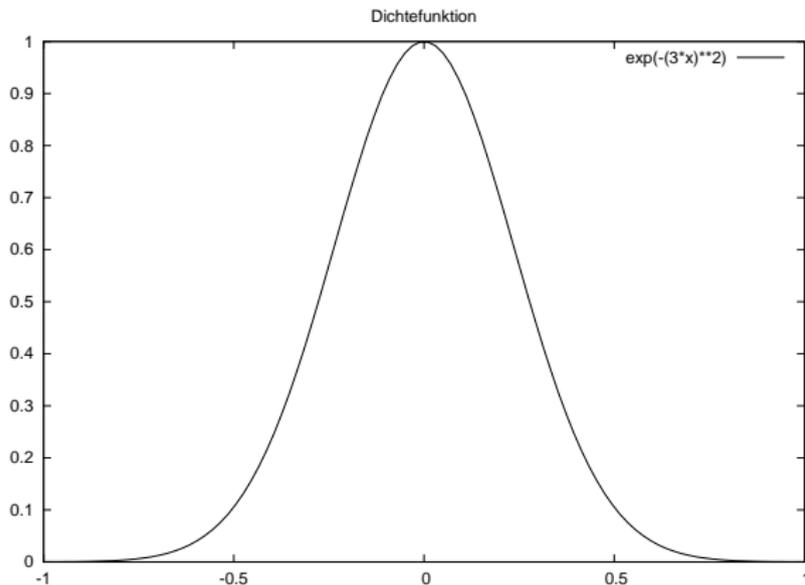
- Binomialverteilung
- negative Binomialverteilung
- Poissonverteilung
- (– Geometrische Verteilung)
- (– Multinomialverteilung)
- (– Hypergeometrische Verteilung)

# Diskrete vs. stetige Zufallsvariable

- Diskret:
  - ▶ Anzahl an Personen (1;2;3;...)
  - ▶ Anzahl an Pkws (1;2;3;....)
- Stetig:
  - ▶ Durchschnittliches Körpergewicht (55,32; 78,21; ....)
  - ▶ Es handelt sich um ganze Zahlen, Bruchzahlen, reelle Zahlen.
  - ▶ Es bestehen aber unendlich viele Möglichkeiten der Ausprägungen in einem Intervall.
  - ▶ Es sind zuviele um sie aufzählen zu können.
  - ▶ Beispiele: Gewichte von Personen; Wartezeit am Bahnhof; Dauer einer Übung Qualitätsmanagement



# Diskrete vs. stetige Zufallsvariable



# Diskrete vs. stetige Zufallsvariable

Eine Dichtefunktion zeigt uns einen Graphen, aus dem wir alle Werte für  $x$  und alle Häufigkeiten ablesen können.

Es gilt: die Fläche unter der Kurve ist 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

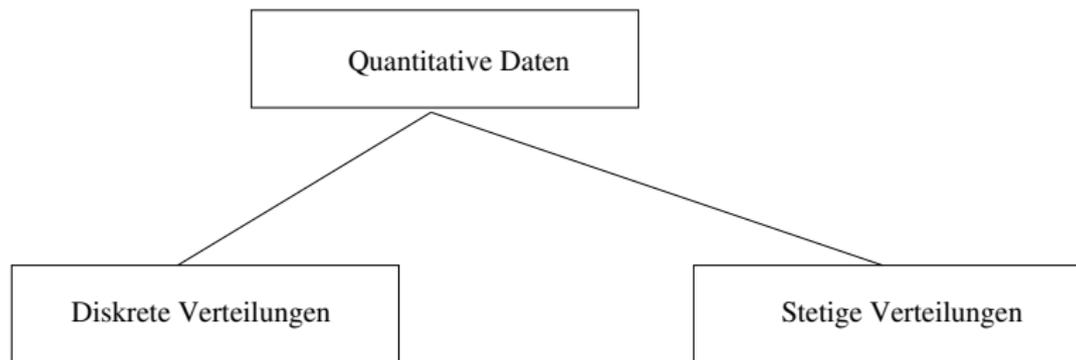
$$f(x) \geq 0$$

Die Wahrscheinlichkeit ist die Fläche unter dem Graphen der Dichtefunktion:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



# Grafische Übersicht



- Binomialverteilung
- negative Binomialverteilung
- Poissonverteilung  
(– Geometrische Verteilung)
- (– Multinomialverteilung)
- (– Hypergeometrische Verteilung)

- Gleichverteilung
- Normalverteilung
- Exponentialverteilung  
(– weitere Verteilungen)

# Gleichverteilung

- Wir haben eine gleichwahrscheinliche Realisation der Ergebnisse.
- Dichtefunktion:  $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- Erwartungswert:  $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Standardabweichung:  $\sigma = (b-a)^2$

## Beispiel:

Sie stehen am Bahnhof und wissen, daß die Züge alle 60 Minuten kommen. Sie treffen zu einem beliebigen Zeitpunkt ein.

X: "Wartezeit auf die Ankunft des Zuges" mit dem Wertebereich (0;60)

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Sie weniger als 10 Minuten warten.
  - ▶ x ist stetig gleichverteilt in  $(a,b) \approx (0;60)$
  - ▶  $P(x < 10) = \frac{1}{6}$

## Beispiel Fortsetzung:

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Sie mehr als 30 Minuten warten.

▶  $P(x > 30) = \frac{1}{2}$

3. mehr als 10 Minuten aber weniger als 30 Minuten

▶  $P(10 < x < 30) = \frac{1}{3}$

4. WS noch 50 Minuten zu warten unter der Bedingung ich habe schon 10 Minuten gewartet.

▶  $P(x > 50 / x = 10) = \frac{P(x > 50)}{P(x > 10)} = \frac{1}{5} = 0.2$

# Aufgabe 1:

Das Ausleihen von Büchern ist vor allem in großen Bibliotheken mit einem Büchermagazin sehr zeitaufwendig. Der Student Otto von Guericke hat die Arbeitsweise der Universitätsbibliothek genau studiert, um besser planen zu können. Die meisten Bücher kann man nicht sofort mitnehmen. Otto füllt deshalb einen Leihschein aus und wirft ihn in den Bestellkasten. Er weiß, daß die Kästen regelmäßig zur vollen Stunde geleert werden und die Leihscheine ins Magazin gebracht werden.

1. Otto wirft den Leihschein zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt, an dem er sich gerade in der Bibliothek befindet, in den Kasten. Wie ist die Zufallsgröße  $X$ : "Wartezeit bis zur nächsten Leerung des Bestellkastens" verteilt (Verteilungstyp und -parameter)
2. Wie lange wird ein Leihschein durchschnittlich im Kasten liegen, bis er ins Magazin wandert?



# Exponentialverteilung:

Beispiel: Sie angeln. Im Durchschnitt fangen Sie 4 Fische pro Stunde. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Sie in der nächsten 1/2 Stunde einen Fisch fangen.

- $x_t$  = Anzahl der Erfolge in einem Intervall der Länge  $t=1$
- Die Exponentialverteilung gibt Auskunft über die Dauer von zufälligen Zeitintervallen.
- $x_t$  ist  $P(\lambda \cdot t)$  wobei  $\lambda$  der Erwartungswert ist
- Exponentialverteilung wird in der Warteschlangentheorie benutzt.

Dichtefunktion:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Wahrscheinlichkeit:

$$P(x \geq t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

# Exponentialverteilung:

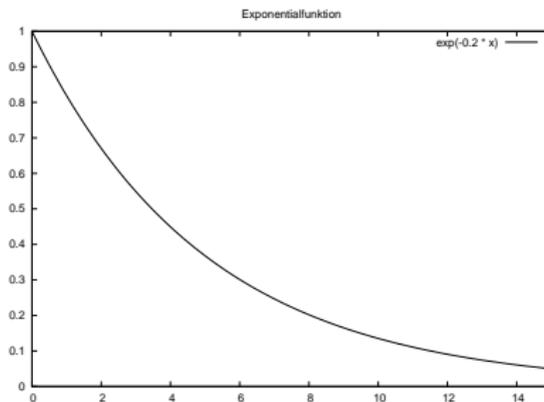
Erwartungswert:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

# Aussehen der Exponentialverteilung:



# Angelergebnis:

$$\begin{aligned}P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) &= 1 - e^{-4 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 1 - e^{-2} = 0.8647\end{aligned}$$

## Weiteres Beispiel:

Zwischen 4 - 6 Uhr besucht im Durchschnitt ein Nasenbär alle 10 Minuten die FIN. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Ich warte 10 Minuten für den 1. Erfolg" in folgenden Intervallen:

1. 1 h
2. 10 min
3. 2 h

# Berechnung

Erwartungswert:

1. Für 1 h :  $E(\lambda) = E(6)$
2. Für 10 min:  $E(\lambda) = E(1)$
3. Für 2 h :  $E(\lambda) = E(12)$

Berechnung der Zeiten

1. Für 1 h :  $t = \frac{1}{6}$
2. Für 10 min:  $t = 1$
3. Für 2 h :  $t = 12$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

1. Für 1 h :  $P(T \leq \frac{1}{6}) = 1 - e^{-6 \cdot \frac{1}{6}} = 0.6321$
2. Für 10 min:  $P(T \leq 1) = 1 - e^{-1} = 0.6321$
3. Für 2 h :  $P(T \leq \frac{1}{12}) = 1 - e^{-12 \cdot \frac{1}{12}} = 0.6321$

# Berechnung

## Anmerkung:

- Ich habe schon 3 Stunden gewartet. Jetzt müßte ich doch einen Fisch fangen.
- Verteilung ohne Gedächtnis!!!

## Aufgabe 2/1:

Der Student Fynn finanziert sein Studium, indem er Schreibaufträge übernimmt. Eines Sonntag nachmittags ist die Farbbandkassette (Inhalt: 20m Band) seiner Schreibmaschine leergeschrieben, doch zum Glück besitzt sein Nachbar eine baugleiche Schreibmaschine mit gleichem Farbband. Da dieser Nachbar zur Zeit im Urlaub ist entfernt Fynn von dieser Maschine die Farbbandkassette unbesehen und tippt den angefangenen Schreibauftrag weiter.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Farbbandkassette

1. ganz voll ist?
2. ganz leer ist?
3. die bis zum Ende des Schreibauftrages noch notwendigen 20cm mindestens enthält?



## Aufgabe 2/2:

Fynn tippt sehr korrekt: Auf 10 Zeilen (entspricht 1,5 m Farbband) geschriebenen Text rechnet er mit  $\frac{3}{8}$  Tippfehlern im Durchschnitt.

1. Wie groß ist der erwartete Abstand zwischen den Tippfehlern (in cm)
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er bei den letzten 20cm Farbband keinen Tippfehler macht.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die letzten 4 Zeilen seiner vorletzten Seite fehlerfrei bleiben, wenn er schon bei den 4 vorhergehenden Zeilen keinen Fehler gemacht hat.



# Normalverteilung:

- Beruht auf dem zentralen Grenzwertsatz: die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.
- Glockenkurve oder auch Gaußsche Glockenkurve genannt.
- Die Normalverteilung beschreibt sehr gut zahlreiche stochastische Prozesse.
- Wir können sehr gut andere Verteilungen approximieren.



# Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

wobei:

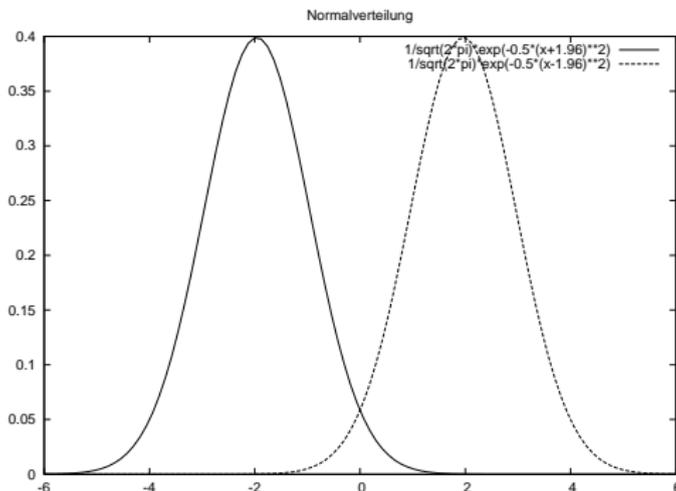
- $f(x)$ : Dichtefunktion
- $\mu$ : Erwartungswert, wobei:  $-\infty < \mu < +\infty$
- $\sigma$ : Standardabweichung, wobei:  $\sigma > 0$
- $x$ : Wert der Zufallsvariable, wobei:  $-\infty < x < +\infty$

Weiterhin:

- Die Glockenkurve ist symmetrisch um  $\mu$
- Es existieren Wendepunkte bei  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$

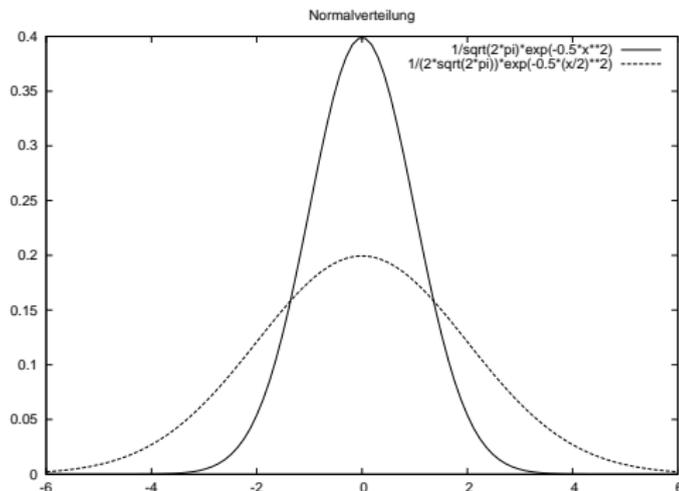
# Grafische Übersicht

Veränderung von  $\mu$  ergibt eine Verschiebung:



# Grafische Übersicht

Veränderung von  $\sigma$  ergibt eine Stauchung bzw. Streckung:



# Standard-Normalverteilung

- Anhand der Grafiken sieht man, daß unendlich viele Tabellen existieren müßten (für die unendliche Kombinationen von  $\mu$  und  $\sigma$ )
- Abhilfe schafft die Normalisierung:  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

z *	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99265	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1*	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2*	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3*	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4*	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5*	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6*	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7*	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8*	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9*	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0*	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998



# Ablesebeispiele für $X$ ist $N(\mu, \sigma^2) = N(120; 25)$ :

$\mu = 120$  und  $\sigma = 5$

1.  $P(X \leq 130)$

▶  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{130 - 120}{5}$

▶  $P(Z \leq +2) = 0.9772$

2.  $P(X \leq 110)$

▶  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{110 - 120}{5}$

▶  $P(Z \leq -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

3.  $P(X > 110)$

▶  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{110 - 120}{5}$

▶  $P(Z > -2) = P(Z \leq 2) = 0.9772$



Ablesebeispiele für  $X$  ist  $N(\mu, \sigma^2) = N(120; 25)$ :

4.  $P(X > 130)$

▶  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{130 - 120}{5}$

▶  $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

5.  $P(110 \leq X \leq 130)$

▶  $P(-2 \leq Z \leq 2)$

=  $P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$

=  $P(Z \leq 2) - P(Z > 2)$

=  $P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2))$

=  $2 \cdot P(Z \leq 2) - 1$



## Aufgabe 3

Sie befinden sich auf dem Breiten Weg und suchen für eine Umfrage Frauen mit Hunden. Man kann davon ausgehen, daß die Wartezeit auf eine Frau in Begleitung eines Hundes normalverteilt ist ( $\mu = 12$ ;  $\sigma = 4$  Minuten).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sie weniger als 8 Minuten warten müssen, bis eine Frau mit Hund vorbeikommt?
2. Sie möchten in 10 Minuten Feierabend machen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie den letzten Fragebogen mit nach Hause nehmen müssen?